E.N.S.I. Option TA 1984

DEUXIÈME ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

DURÉE : 4 heures

PARTIE 1

E est l'ensemble des polynômes à coefficients réels, dont l'indéterminée est notée X :

$$u : \begin{array}{c} E \longrightarrow E \\ P \longmapsto u(P) \end{array} \quad \text{où} \quad [u(P)](X) = P(X+1) - P(X).$$

1. Démontrer que u est une application linéaire (pour la structure de $\mathbb{R}$- espace vectoriel de E).

2. E_4 est le sous-ensemble des polynômes de E, dont le degré est 4 au plus.
$\mathcal{C}_4 = (1, X, X^2, X^3, X^4)$ est la base canonique du $\mathbb{R}$- espace vectoriel E_4.

   2.1. Démontrer que E_4 est stable par u. On note alors u_4 la restriction de u à E_4, c'est-à-dire u_4 :

$$\begin{array}{c} E_4 \longrightarrow E_4 \\ P \longmapsto u(P) \end{array}$$

   2.2. Calculer U_4, matrice de u_4 dans la base $\mathcal{C}_4$ de E_4.
   En déduire le polynôme caractéristique de u_4. Quel est le noyau de u_4 ?

   2.3. Démontrer que 1 est une base du noyau de u_4. On note $H_0(X) = 1$.
   Calculer successivement les polynômes H_1, H_2, H_3, H_4 de E_4 tels que :

$$\begin{cases} u_4(H_1) = H_0 \\ H_1(0) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} u_4(H_2) = H_1 \\ H_2(0) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} u_4(H_3) = H_2 \\ H_3(0) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} u_4(H_4) = H_3 \\ H_4(0) = 0 \end{cases}$$

   2.4. Démontrer que $\mathcal{H}_4 = (H_0, H_1, H_2, H_3, H_4)$ est une base de E_4.
   Quelle est la matrice T_4 de u_4 dans cette base $\mathcal{H}_4$ de E_4 ?
   Quelle est la matrice de passage P_4 de la base $\mathcal{C}_4$ de E_4 à la base $\mathcal{H}_4$ de E_4 ?

3. Soit n un entier naturel non nul. E_n est le sous-ensemble des polynômes de E de degré n au plus. On se propose de généraliser les résultats de 2.

   3.1. Démontrer que E_n est stable par u. On note u_n : $\begin{array}{c} E_n \longrightarrow E_n \\ P \longmapsto u(P) \end{array}$

   3.2. On note $H_0 = 1$

$$H_k = \frac{1}{k!} X(X-1)(X-2) \ldots (X-k+1) \text{ pour } 1 \leqslant k \leqslant n, k \text{ entier}.$$

   Démontrer que $\mathcal{H}_n = (H_0, H_1, H_2, \ldots H_n)$ est une base de E_n.

   3.3. Calculer $u(H_0)$. Pour tout entier $k \in [1, n]$, calculer $u(H_k)$ à l'aide des polynômes de la base $\mathcal{H}_n$ de E_n.
   Écrire la matrice T_n de u_n dans la base $\mathcal{H}_n$ de E_n.

   3.4. Soit P le polynôme de E_n qui s'écrit $P = \alpha_0 H_0 + \alpha_1 H_1 + \alpha_2 H_2 + \ldots + \alpha_n H_n$
   où les α_i sont des nombres réels.
   On note $u^0 = id_E$, et pour tout $p \in \mathbb{N}$, $u^{p+1} = u \circ u^p$.
   Démontrer que pour tout entier $i \in [0, n]$, on a $\alpha_i = [u^i(P)](0)$.

.../...

4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit v_n : $\begin{array}{l} E_n \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1} \\ P \longrightarrow (P(0),\ P(1),\ P(2),\ -,P(n)) \end{array}$

4.1. Démontrer que v_n est un isomorphisme pour les structures de $\mathbb{R}$- espace vectoriel de E_n et de $\mathbb{R}^{n+1}$.

4.2. Démontrer qu'il existe un et un seul polynôme P de E_4
tel que $P(0) = -1$, $P(1) = -2$, $P(2) = -7$, $P(3) = 2$, $P(4) = 67$.
On ne demande pas d'expliciter ce polynôme.

4.3. Reproduire et compléter le tableau suivant (dans sa partie non hachurée).

x	$P(x)$	$[u(P)]\ (x)$	$[u^2(P)]\ (x)$	$[u^3(P)]\ (x)$	$[u^4(P)]\ (x)$
0.....					
1.....					
2.....					
3.....					
4.....					

En déduire l'expression de P dans la base $\mathcal{H}_4$ de E_4.

Partie 2

1. Soit $P = X^4 - 3X^3 + X - 1$.

1.1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note f_n : $\begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto f_n(x) \end{array}$ où $f_n(x) = P(n)\ x^n$.

Quel est le rayon de convergence de la série entière de terme général f_n ?
Préciser l'ensemble de convergence absolue et l'ensemble de convergence de cette série entière.

1.2. Lorsque $x \in \mathbb{R}$ et $|x| < 1$, calculer directement en fonction de x les valeurs suivantes :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^n, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} nx^n, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)\,x^n, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)(n-2)\,x^n, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)(n-2)(n-3)\,x^n$$

1.3. Écrire P en fonction de H_0, H_1, H_2, H_3, H_4.

Lorsque $x \in \mathbb{R}$ et $|x| < 1$, en déduire la valeur de $\sum_{n=0}^{+\infty} P(n)\,x^n$ en fonction de x.

.../...

2. On se propose de généraliser 1.

Soit P un polynôme de E_q où $q \in \mathbb{N}^*$. P s'écrit $P = \alpha_0 H_0 + \alpha_1 H_1 + \alpha_2 H_2 + \cdots + \alpha_q H_q$ où les α_i sont des nombres réels.

2.1. Lorsque $x \in \mathbb{R}$, $|x| < 1$ et p entier, $p \in [0, q]$, calculer :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)(n-2)\cdots(n-p+1)\,x^n.$$

2.2. Lorsque $x \in \mathbb{R}$, $|x| < 1$, calculer la valeur de $\sum_{n=0}^{+\infty} P(n)x^n$ en fonction de x et des coefficients α_i.

Partie 3

Cette partie ne dépend ni de la partie 1, ni de la partie 2

Soit f :

$$\begin{array}{ccc}]-1, 1[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array} \qquad \text{où } f(x) = \frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^4)}$$

1. On note $F(X) = \frac{1}{(1-X)(1-X^2)(1-X^4)}$, fraction rationnelle de $\mathbb{R}(X)$

Décomposer $F(X)$ en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$.

2. Lorsque $x \in \mathbb{R}$ et $|x| < 1$, écrire le développement en séries entières des fonctions définies par les relations suivantes :

$$s_1(x) = \frac{1}{1-x}, \qquad s_2(x) = \frac{1}{(1-x)^2}, \qquad s_3(x) = \frac{1}{(1-x)^3},$$

$$s_4(x) = \frac{1}{1+x}, \qquad s_5(x) = \frac{1}{(1+x)^2}, \qquad s_6(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

3. Lorsque $x \in \mathbb{R}$ et $|x| < 1$, en déduire le développement en série entière de la fonction f (on donnera exactement la valeur du coefficient a_n de x^n dans les 4 cas suivants : $n = 4p$, $n = 4p+1$, $n = 4p+2$, $n = 4p+3$, $p \in \mathbb{N}$).

Partie 4

(1.2.3. sont indépendants de ce qui précède, 4 utilise « partie 3,3. »)

1. Soit $(s_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ une suite d'entiers naturels strictement positifs, deux à deux distincts. Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, on note $W_{n,p} = \{(n_1, n_2, \ldots, n_p) \in \mathbb{N}^p \mid n_1 s_1 + n_2 s_2 + \cdots + n_p s_p = n\}$

($W_{n,p}$ est donc l'ensemble des solutions dans $\mathbb{N}^p$ de l'équation $n_1 s_1 + n_2 s_2 + \cdots + n_p s_p = n$, dont l'inconnue est $(n_1, \ldots, n_p)$, et où $s_1, s_2, \ldots, s_p, n$ sont des paramètres.)

On se propose de démontrer que $W_{n,p}$ est un ensemble fini et de calculer le nombre de ses éléments.

1.1. Démontrer que $W_{n,p} \subset [0, n]^p$

.../...